

TRU DI

DETERMINANTE DELLE RADICI
DI UNA EQUAZIONE



33054-

ms. 51-31-154



INTORNO AD UN DETERMINANTE

più generale di quello che suol dirsi:

DETERMINANTE DELLE RADICI DI UNA EQUAZIONE

ED ALLE FUNZIONI SIMMETRICHE COMPLETE

DI QUESTE RADICI

PER

N. TRUDI

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli

Fascicolo 5.° — Maggio 1864.

Stampato nel Fibreno 1864

1

Supposto che $a, b, c, \dots, k, l$ siano n quantità qualunque, reali o immaginarie, si sa che il determinante P dell'ordine n

$$(1) \quad P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & d & \dots & l \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & \dots & l^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & \dots & l^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & d^{n-1} & \dots & l^{n-1} \end{vmatrix}$$

equivale al prodotto di tutte le differenze a due a due delle n quantità, preso queste differenze in guisa che ogni termine della serie $a, b, c, \dots, k, l$ sia sottratto da ciascuno di quelli che lo seguono; di modo che si avrà

$$(2) \quad \begin{aligned} P = & (b-a)(c-a)(d-a) \dots (l-a) \times \\ & (c-b)(d-b) \dots (l-b) \times \\ & (d-c) \dots (l-c) \times \\ & \dots \times \\ & (l-k). \end{aligned}$$

Nel determinante attuale gli elementi di ciascuna verticale sono le

successive potenze di una medesima quantità dalla minima di grado zero fino a quella di grado $n-1$; ma vi sono quistioni importanti che conducono a determinanti della stessa specie, dove però gli elementi di ciascuna verticale sono potenze qualunque, non più successive di una medesima quantità, come accade nel determinante che dinotiamo con R:

$$R = \begin{vmatrix} a^p & b^p & c^p & d^p & \dots & l^p \\ a^q & b^q & c^q & d^q & \dots & l^q \\ a^r & b^r & c^r & d^r & \dots & l^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^t & b^t & c^t & d^t & \dots & l^t \end{vmatrix}$$

dove supponiamo che $p, q, \dots, t$ siano numeri qualsivogliano interi.

Questo determinante è evidentemente una funzione omogenea delle n quantità $a, b, \dots, l$ del grado $p+q+\dots+t$, ed è chiaro che, al pari del determinante P, esso è divisibile per tutte le differenze a due a due delle quantità medesime, di modo che, se s s'indica con Q il quoziente, si avrà

$$R = PQ,$$

e lo stesso quoziente Q sarà una funzione omogenea di quelle quantità del grado $p+q+\dots+t - \frac{n(n-1)}{1.2}$; ma è importante di aversi l'espressione di una tal funzione; ed è questa la ricerca della quale intendiamo occuparci.

Intanto, siccome in siffatta quistione si presenta una specie particolare di funzioni risultanti dagli elementi $a, b, \dots, l$, così per renderne chiarissima la risoluzione troviamo opportuno di premettere intorno ad esse alcune considerazioni le quali interessano il nostro argomento. Se immaginiamo sviluppato il polinomio

$$(a + b + c + \dots + l)^r$$

dove r è un numero intero e positivo qualunque, e quindi rimpiazzati con l'unità tutti i coefficienti numerici, il polinomio che si ottiene in tal guisa è una funzione omogenea di grado r degli n elementi $a, b, \dots, l$, la quale può chiamarsi *funzione simmetrica completa di grado r de'detti ele-*

menti, perchè in effetti è simmetrica; ed inoltre perchè comprende tutte le funzioni simmetriche di grado r ch'è possibile di formare con questi elementi prendendoli ad uno ad uno, a due a due, a tre a tre, etc. (*). Ora noi converremo di indicare questa funzione simmetrica completa con la notazione

$$(a, b, c, \dots, l)^r$$

e sarà per esempio

$$\begin{aligned} (a, b) &= a + b, & (a, b, c) &= a + b + c \\ (a, b)^2 &= a^2 + ab + b^2, & (a, b, c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc \\ (a, b)^3 &= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3, & (a, b, c)^3 &= a^3 + a^2(b+c) + a(b^2+bc+c^2) + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 \end{aligned}$$

Intorno alla notazione adottata è necessario di avvertire che per $r=0$ si ha $(a, b, \dots, l)^0 = (a + b + \dots + l)^0 = 1$; e di più che in generale si ha

$$(a, b, c, \dots, l)^r = a^r + a^{r-1}(b, c, \dots, l) + a^{r-2}(b, c, \dots, l)^2 + \dots + a(b, c, \dots, l)^{r-1} + (b, c, \dots, l)^r;$$

ma siccome il secondo membro si può scrivere

$$a[a^{r-2} + a^{r-3}(b, c, \dots, l) + a^{r-4}(b, c, \dots, l)^2 + \dots + (b, c, \dots, l)^{r-2}] + (b, c, \dots, l)^r,$$

ed il secondo fattore del primo termine equivale ad $(a, b, c, \dots, l)^{r-1}$, così risulta

$$(a, b, c, \dots, l)^r = a(a, b, c, \dots, l)^{r-1} + (b, c, \dots, l)^r.$$

Poichè nel secondo membro è lecito di scambiare la a con qualunque altra lettera, avremo ancora

$$(a, b, c, \dots, l)^r = b(a, b, c, \dots, l)^{r-1} + (a, c, \dots, l)^r$$

ovvero

$$\begin{aligned} (a, b, c, \dots, l)^r &= c(a, b, c, \dots, l)^{r-1} + (a, b, d, \dots, l)^r \\ \text{etc:} & \qquad \qquad \text{etc:} & \qquad \qquad \text{etc:} \end{aligned}$$

e quindi possiamo concludere, che: *la funzione simmetrica completa di n lettere, del grado r , equivale alla somma del prodotto della funzione*

(*) Queste interessanti funzioni sono state già considerate dal Wronski, da cui furono dette funzioni *aleph*, dalla caratteristica in carattere ebraico di cui si valeva per dimostrarle; ma trattandosi di una notazione fastidiosa e per niente familiare, abbiamo creduto di non doverla ritenere.

simmetrica completa delle stesse n lettere, ma di grado $r-1$, moltiplicata per una qualunque delle lettere, e della funzione simmetrica completa di grado r relativa alle rimanenti $n-1$ lettere.

Segue da questa proposizione che

$$(b, c, \dots, l)^r = (a, b, c, \dots, l)^r - a(a, b, c, \dots, l)^{r-1},$$

e quindi si avrebbe in particolare

$$a^r = (a, b)^r - b(a, b)^{r-1}$$

$$(a, b)^r = (a, b, c)^r - c(a, b, c)^{r-1}$$

$$(a, b, c)^r = (a, b, c, d)^r - d(a, b, c, d)^{r-1}$$

$$\text{etc:} \quad \text{etc:} \quad \text{etc:}$$

Supponiamo ora due sistemi di uno stesso numero di lettere

$$a, b, c, \dots, i, k$$

$$a, b, c, \dots, i, l$$

differenti solo per una lettera, e siano k, l queste lettere differenti nei due sistemi; è evidente che la differenza

$$(a, b, c, \dots, i, k)^r - (a, b, c, \dots, i, l)^r$$

è esattamente divisibile per $k-l$, perciocchè si annulla se $k=l$; ma aggiungiamo che il quoziente è rappresentato da $(a, b, c, \dots, i, k, l)^{r-1}$, cioè dalla funzione simmetrica completa di grado $r-1$ relativa a tutte le lettere sì comuni che diverso de' due sistemi. Ed in fatti essendo

$$(a, b, \dots, i, k)^r = k(a, b, \dots, i, k)^{r-1} + (a, b, \dots, i)^r$$

$$(a, b, \dots, i, l)^r = l(a, b, \dots, i, l)^{r-1} + (a, b, \dots, i)^r,$$

sottraendo queste equazioni membro a membro vorrà

$$(a, b, \dots, i, k)^r - (a, b, \dots, i, l)^r = k(a, b, \dots, i, k)^{r-1} - l(a, b, \dots, i, l)^{r-1};$$

ma si ha pure

$$(a, b, \dots, i, k)^{r-1} = (a, b, \dots, i, k, l)^{r-1} - l(a, b, \dots, i, k, l)^{r-2}$$

$$(a, b, \dots, i, l)^{r-1} = (a, b, \dots, i, k, l)^{r-1} - k(a, b, \dots, i, k, l)^{r-2},$$

adunque sostituendo e riducendo si otterrà

$$\{a, b, \dots, i, k\} - \{a, b, \dots, i, l\} = (k-l) \{a, b, \dots, i, k, l\}^{r-1};$$

e quindi risulta come voleva dimostrarsi

$$\frac{\{a, b, \dots, i, k\} - \{a, b, \dots, i, l\}}{k-l} = \{a, b, \dots, i, k, l\}^{r-1}.$$

Nelle considerazioni che precedono abbiamo un algoritmo che permette di trovare assai facilmente il quoziente della divisione del determinante R pel determinante P. In fatti cominciando a togliere nel determinante R la prima da tutte le altre verticali, il suo valore non si altera, ma tutte le nuove verticali dalla seconda all'ultima saranno ordinatamente divisibili per le differenze $b-a, c-a, d-a, \dots, k-a, l-a$, e però effettuata questa prima divisione otterremo per quoziente

$$\begin{vmatrix} a^p \{a, b\}^{p-1} \{a, c\}^{p-1} \{a, d\}^{p-1} & \dots & \{a, b\}^{p-1} \{a, l\}^{p-1} \\ a^p \{a, b\}^{p-1} \{a, c\}^{p-1} \{a, d\}^{p-1} & \dots & \{a, b\}^{p-1} \{a, l\}^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^l \{a, b\}^{l-1} \{a, c\}^{l-1} \{a, d\}^{l-1} & \dots & \{a, b\}^{l-1} \{a, l\}^{l-1} \end{vmatrix}$$

In questo determinante toglieremo la seconda da ciascuna delle rimanenti verticali; così le nuove verticali dalla terza in poi saranno ordinatamente divisibili per le differenze $c-b, d-b, \dots, k-b, l-b$, ed effettuata quest'altra divisione verrà per quoziente

$$\begin{vmatrix} a^p \{a, b\}^{p-1} \{a, b, c\}^{p-2} \{a, b, d\}^{p-2} & \dots & \{a, b, k\}^{p-2} \{a, b, l\}^{p-2} \\ a^p \{a, b\}^{p-1} \{a, b, c\}^{p-2} \{a, b, d\}^{p-2} & \dots & \{a, b, k\}^{p-2} \{a, b, l\}^{p-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^l \{a, b\}^{l-1} \{a, b, c\}^{l-2} \{a, b, d\}^{l-2} & \dots & \{a, b, k\}^{l-2} \{a, b, l\}^{l-2} \end{vmatrix}$$

E ripetendo lo stesso procedimento col togliere la terza da tutte le seguenti verticali, le medesime diverranno divisibili per le differenze $d-c, c-c, \dots, k-c, l-c$; e fatta la divisione si avrà il quoziente

$$\begin{vmatrix} a^p \{a, b\}^{p-1} \{a, b, c\}^{p-2} \{a, b, c, d\}^{p-3} & \dots & \{a, b, c, k\}^{p-3} \{a, b, c, l\}^{p-3} \\ a^p \{a, b\}^{p-1} \{a, b, c\}^{p-2} \{a, b, c, d\}^{p-3} & \dots & \{a, b, c, k\}^{p-3} \{a, b, c, l\}^{p-3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^l \{a, b\}^{l-1} \{a, b, c\}^{l-2} \{a, b, c, d\}^{l-3} & \dots & \{a, b, c, k\}^{l-3} \{a, b, c, l\}^{l-3} \end{vmatrix}$$

Ma ora è manifesto che, continuando nella stessa maniera fino a togliere

re la penultima dall' ultima verticale, diverrà questa divisibile per l' ultima differenza $l-k$; e fatta quest' ultima divisione otterremo infine

$$Q = \frac{R}{P} = \begin{vmatrix} a^p (a, b)^{p-2} (a, b, c)^{p-2} & (a, b, c, \dots, l)^{p-2} \\ a^q (a, b)^{q-2} (a, b, c)^{q-2} & (a, b, c, \dots, l)^{q-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^l (a, b)^{l-2} (a, b, c)^{l-2} & (a, b, c, \dots, l)^{l-2} \end{vmatrix}$$

Segue dalla costruzione di questo determinante che nella prima verticale dee figurare la sola prima lettera della serie $a, b, c, \dots, l$; nella seconda le prime due, nella terza le prime tre, e così di seguito fino all' ultima in cui debbono figurare tutte le lettere; di modo che i soli elementi dell' ultima verticale sono funzioni simmetriche complete relative a tutte le lettere medesime. Ed inoltre è manifesto che in ogni orizzontale la serie degli esponenti è sempre una serie di numeri naturali decrescenti, notando tuttavia (come segue dalla natura delle operazioni eseguite) che per valori particolari di $p, q, \dots, l$, debbono essere considerati come nulli gli elementi pe' quali gli esponenti risultano negativi, e come uguali ad uno quelli pe' quali l' esponente è nullo.

Ma il determinante Q è suscettibile di una forma ben più interessante, la quale sarà messa in veduta dimostrando che tra le lettere, che figurano in qualunque verticale, è sempre lecito (salvo rimanendo il valore del determinante) d' introdurre anche quella, che oltre ad esse, figura nella verticale seguente. Così, per esempio, nella seconda verticale, dove figurano le due lettere a, b , possiamo introdurre la lettera c , che si trova, oltre a quelle, nella terza; ed in fatti essendo

$$\begin{aligned} (a, b)^{p-2} &= (a, b, c)^{p-2} - c(a, b, c)^{p-3} \\ (a, b)^{q-2} &= (a, b, c)^{q-2} - c(a, b, c)^{q-3} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (a, b)^{l-2} &= (a, b, c)^{l-2} - c(a, b, c)^{l-3} \end{aligned}$$

potremo sostituire queste espressioni agli elementi della seconda verticale; ma allora, aggiungendole la terza moltiplicata per c , la serie degli elementi della seconda verticale si troverà mutata nella serie $(abc)^{p-2}, (abc)^{q-2}, \dots, (abc)^{l-2}$. Questa osservazione intanto conduce immediatamente

te alla conseguenza singolare che gli elementi del determinante Q possono (rimanendo gli esponenti inalterati), esser tutti cangiati in funzioni simmetriche complete relative a tutte le n lettere $a, b, c, \dots, l$; o quindi invece della forma superiore avremo pel quoziente Q la forma notabilissima

$$Q = \begin{vmatrix} (a, b, \dots, l)^p & (a, b, \dots, l)^{p-1} & (a, b, \dots, l)^{p-2} & \dots & (a, b, \dots, l)^{p-n+1} \\ (a, b, \dots, l)^q & (a, b, \dots, l)^{q-1} & (a, b, \dots, l)^{q-2} & \dots & (a, b, \dots, l)^{q-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a, b, \dots, l)^t & (a, b, \dots, l)^{t-1} & (a, b, \dots, l)^{t-2} & \dots & (a, b, \dots, l)^{t-n+1} \end{vmatrix}$$

Divenendo ora opportuna una notazione più concisa per dinotare le funzioni simmetriche complete di diversi gradi relativo ad uno stesso numero di lettere, adotteremo all'uopo il simbolo V_r per indicare la funzione di grado r , di modo che sarà in generale

$$V_r = (a, b, c, \dots, l)^r,$$

e quindi in particolare

$$V_0 = 1, \quad V_1 = (a, b, \dots, l) = a + b + \dots + l, \quad V_2 = (a, b, \dots, l)^2, \text{ etc. etc.};$$

e la formola precedente verrà mutata in

$$Q = \begin{vmatrix} V_p & V_{p-1} & V_{p-2} & \dots & V_{p-n+1} \\ V_q & V_{q-1} & V_{q-2} & \dots & V_{q-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_t & V_{t-1} & V_{t-2} & \dots & V_{t-n+1} \end{vmatrix}$$

Applicando per esempio questa forma allo stesso determinante P, nel qual caso il determinante dividendo R è identico col divisore P, non ha che a suporsi $p=0, q=1, s=2$, etc.; e quindi risulta

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ V_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ V_2 & V_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ V_3 & V_2 & V_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n-2} & V_{n-3} & V_{n-4} & V_{n-5} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

vale a dire nel caso attuale si ha, com' esser dovea, $Q=1$.

Applicazioni

Supposto che $a, b, c, \dots, l$ siano le n radici dell'equazione

$$(1) \quad x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

è evidente che la medesima può mettersi nella forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & a & b & c & \dots & l \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 & \dots & l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & a^n & b^n & c^n & \dots & l^n \end{vmatrix} = 0$$

perchè è soddisfatta ponendovi $x=a, b, c, \dots, l$. Ma osserveremo che in questa forma l'equazione è divisibile per tutte le differenze a due a due delle n radici, e possiamo subito avere il quoziente applicando al determinante la precedente trasformazione, fatta astrazione dalla prima verticale. Adunque, dinotata con V_r la funzione simmetrica completa di grado r delle dette radici, la data equazione si trasforma nell'altra

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & V_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & V_2 & V_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1} & V_{n-1} & V_{n-2} & V_{n-3} & \dots & 1 \\ x^n & V_n & V_{n-1} & V_{n-2} & \dots & V_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ora posto mente alla forma di questo determinante si vedrà facilmente che la novella equazione si sviluppa come segue

$$x^n - V_1 x^{n-1} + \begin{vmatrix} V_1 & 1 \\ V_2 & V_1 \end{vmatrix} x^{n-2} - \begin{vmatrix} V_1 & 1 & 0 \\ V_2 & V_1 & 1 \\ V_3 & V_2 & V_1 \end{vmatrix} x^{n-3} + \begin{vmatrix} V_1 & 1 & 0 & 0 \\ V_2 & V_1 & 1 & 0 \\ V_3 & V_2 & V_1 & 1 \\ V_4 & V_3 & V_2 & V_1 \end{vmatrix} x^{n-4} - \dots = 0$$

zioni simmetriche complete delle radici della data equazione (1) fino a quella di grado n , cioè fino a V_n , ma è facile di riconoscerlo la loro generalità. In fatti moltiplicando l'equazione per x^m , essendo m un intero qualunque, si ha

$$x^{n+m} + p_1 x^{n+m-1} + p_2 x^{n+m-2} + \dots + p_{n-1} x^{m+1} + p_n x^m = 0,$$

equazione di grado $n+m$, la quale oltre alle n radici $a, b, \dots, l$, ha pure m radici nulle, in guisa che saranno identiche due funzioni simmetriche complete di gradi uguali relative alle due equazioni; ma frattanto è manifesto che, oltre allo (2), qualunque sia m sussisterà l'equazione

$$(3) \quad V_{n+m} + V_{n+m-1} p_1 + V_{n+m-2} p_2 + \dots + V_{n+1} p_{n-1} + V_n p_n = 0,$$

che unita alle stesso (2), ponendovi successivamente $m=1, 2, 3$, etc. determina i valori di V_{n+1}, V_{n+2} , etc.; ma quindi risulta la generalità della formola (3), la quale adunque sussiste per qualsivoglia valore di r .

In quanto alla costruzione delle funzioni V , si vede che esse possono essere calcolate sia per mezzo delle equazioni (2) facendole dipendere le une dalle altre, sia direttamente per mezzo della formola (3). Così il calcolo di queste funzioni si riduce allo sviluppo del determinante Δ_r , il quale per la sua forma particolare può essere sviluppato in diverse maniere più semplici di quelle che risultano da' metodi generali. Per esempio si vede facilmente che si ha

$$\Delta_r = p_1 \Delta_{r-1} - p_2 \Delta_{r-2} + p_3 \Delta_{r-3} - \dots + (-1)^{r-1} p_{n-1} \Delta_1 + (-1)^r p_n \Delta_0, \quad (\Delta_0 = 1)$$

ed è chiaro che col mezzo di questa formola il valore di Δ_r può essere rapidamente calcolato; ond'è che si avrebbe immediatamente

$$\Delta_1 = p_1,$$

$$\Delta_2 = p_1 \Delta_1 - p_2 = p_1^2 - p_2,$$

$$\Delta_3 = p_1 \Delta_2 - p_2 \Delta_1 + p_3 = p_1^3 - 2p_1 p_2 + p_3,$$

$$\Delta_4 = p_1 \Delta_3 - p_2 \Delta_2 + p_3 \Delta_1 - p_4 = p_1^4 - 3p_1^2 p_2 + 2p_1 p_3 - p_2^2 + p_4,$$

$$\dots \dots \dots$$

Può ancora stabilirsi un'altra formola capace di dare direttamente il

valore di V_r ; ma a tale effetto gioverà supporre l'equazione (1) ridotta alla seguente forma

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_{n-1} x - a_n = 0,$$

in guisa che sarà

$$p_1 = -a_1, p_2 = -a_2, p_3 = -a_3, \dots, p_n = -a_n.$$

In virtù di questo cangiamento l'espressione di V_r prenderà la forma

$$(5) \quad V_r = a_1 V_{r-1} + a_2 V_{r-2} + a_3 V_{r-3} + \dots + a_r;$$

e quindi, mutandovi successivamente la r in $r-1$, $r-2$, etc. avremo

$$V_{r-1} = a_1 V_{r-2} + a_2 V_{r-3} + a_3 V_{r-4} + \dots + a_{r-1}$$

$$V_{r-2} = a_1 V_{r-3} + a_2 V_{r-4} + a_3 V_{r-5} + \dots + a_{r-2}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

sostituendo questi valori nella (5) otterremo con legge manifesta

$$V_r = a_1 + a_{r-1}(a_1) + a_{r-2}[a_1 + a_1(a_1)] + a_{r-3}[a_1 + a_1(a_1) + a_1(a_1 + a_1(a_1))]$$

$$+ \dots + a_{r-2}A_r + \dots$$

osservando che A_r , coefficiente di a_{r-2} , si forma mutando r in s in tutti i termini precedenti.

In altra occasione abbiamo dimostrato che si ha

$$A_r = \sum (-1)^{r+s} \frac{p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_r^{e_r}}{\pi_{e_1} \pi_{e_2} \pi_{e_3} \dots \pi_{e_r}},$$

dove la somma deve intendersi estesa a tutte le soluzioni intere e positive, incluso il zero, dell'equazione

$$e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \dots + re_r = r,$$

essendosi messo per compendio

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_r = e,$$

•

e dove inoltre si ha in generale $\Pi m = 1.2.3...m$, e $\Pi 0 = 1$; e perciò le funzioni V , potranno ancora essere calcolate per mezzo della formola

$$V_r = (-1)^r \sum (-1)^{r-i} \Pi_i \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}}{\Pi_i \Pi_{a_1} \dots \Pi_{a_i}}.$$

Ma le equazioni (2) palesano un'altra osservabile generazione delle funzioni V_r : generazione per cui non solo si può rendere speditissimo il loro calcolo numerico, ma che serve cziando a mettere in maggiore evidenza la loro natura. Quelle equazioni in fatto dimostrano che se si sviluppa la funzione

$$\frac{1}{x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n}$$

secondo le potenze decrescenti di x , i coefficienti dello sviluppo, a cominciare dal primo termine, saranno $1, V_1, V_2, V_3$, etc.; il che salta subito agli occhi di coloro che sono familiari con siffatte trasformazioni; ma per convincersene basterà supporre

$$\frac{1}{x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n} = x^{-n} + A_1 x^{-n-1} + A_2 x^{-n-2} + \dots + A_r x^{-n-r} + \dots$$

e proporsi la determinazione de' coefficienti $A_1, A_2, \dots$. Ora liberando da fratti risulta l'equazione identica

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = A_1 & \left| \begin{array}{c} x^{-n} + A_2 \\ + p_1 \end{array} \right| & x^{-n} + A_2 & \left| \begin{array}{c} x^{-n} + A_3 \\ + A_2 p_1 \\ + p_2 \end{array} \right| & x^{-n} + \dots + A_r & \left| \begin{array}{c} x^{-n} + \dots + A_{r-1} p_2 \\ + \dots + A_{r-2} p_2 \\ + \dots + A_{r-3} p_2 \\ \dots \\ + A_2 p_{r-1} \\ + p_r \end{array} \right| & x^{-n} + \dots \end{array}$$

e quindi per determinare le A si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} A_1 + p_1 &= 0 \\ A_1 + A_2 p_1 + p_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 p_1 + A_3 p_2 + p_3 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ A_1 + A_{r-1} p_1 + A_{r-2} p_2 + \dots + A_1 p_{r-1} + p_r &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

le quali non sono punto diverse dalle (2). Adunque il valore di A_r è identico con quello di V_r ; di modo che si ha lo sviluppo

$$(6) \quad \frac{1}{x^r + p_1 x^{r-1} + \dots + p_r} = V_0 x^{-r} + V_1 x^{-r+1} + V_2 x^{-r+2} + \dots + V_r x^{-r+r} + \dots$$

e siamo così condotti al teorema seguente :

La funzione simmetrica completa di grado r relativa alle radici dell'equazione

$$x^r + p_1 x^{r-1} + p_2 x^{r-2} + \dots + p_{r-1} x + p_r = 0$$

è uguale al coefficiente di x^{-r} nello sviluppo in potenze discendenti di x della funzione

$$\frac{1}{x^r + p_1 x^{r-1} + p_2 x^{r-2} + \dots + p_{r-1} x + p_r}$$

Cambiando nella (6) la x in $\frac{1}{y}$, e poi dividendo i due membri per y^r si ottiene

$$\frac{1}{1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_r y^r} = 1 + V_1 y + V_2 y^2 + V_3 y^3 + \dots + V_r y^r + \dots$$

e quindi il teorema precedente si traduce nell'altro:

La funzione simmetrica completa di grado r relativa alle radici dell'equazione

$$x^r + p_1 x^{r-1} + p_2 x^{r-2} + \dots + p_{r-1} x + p_r = 0$$

è uguale al coefficiente di x^r nello sviluppo in potenze ascendenti di x della funzione

$$\frac{1}{1 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_r x^r}$$

Considerando l'equazione

$$\varphi(x) = (1-x^a)(1-x^b)(1-x^c) \dots (1-x^l) = 0$$

in cui supponiamo che $a, b, c, \dots, l$ siano numeri interi e positivi, osserveremo che le sue radici non sono diverse da quelle dell'altra che si forma da essa cambiandovi x in $\frac{1}{x}$; e quindi risulta che, se si sviluppa

la funzione $\frac{1}{\varphi(x)}$ secondo le potenze ascendenti di x , il coefficiente della potenza x^r sarà uguale alla funzione simmetrica completa di grado r relativa alle radici dell'equazione $\varphi(x) = 0$. Riavvicinando adunque questo risultamento ad un teorema di Paoli relativo alla partizione de' numeri abbiamo il teorema che segue:

Il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione

$$ax + by + cz + \dots + lu = r$$

è espresso dalla funzione simmetrica completa di grado r relativa alle radici dell'equazione

$$(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c) \dots (1-x^l) = 0.$$

Ma in rapporto al calcolo di quest'ultima funzione gioverà osservare il teorema seguente, che risulta immediatamente dalle (2) e dalla (4):

La funzione simmetrica completa di grado r relativa alle radici dell'equazione binomia $x^n - 1 = 0$ è uguale ad uno, se il grado r della funzione è multiplo del grado n dell'equazione; ed è zero nel caso opposto.

Se si tratta dell'equazione binomia $x^n + 1 = 0$, il teorema precedente si modifica come segue:

La funzione simmetrica completa di grado r relativa alle radici dell'equazione $x^n + 1 = 0$ è zero, se il grado r della funzione non è divisibile per grado n dell'equazione. Nel caso opposto quella funzione è uguale a $+1$ o -1 secondochè il quoziente $\frac{r}{n}$ è un numero pari, o un numero impari.



680865

